Tanım: $f: A \to \mathbb{R}$ fonksiyon olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ olduğunda $|f(x) - L| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ bulunabiliyorsa x x_0 a soldan yaklaşırken f in limiti L dir denir ve $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$ yazılır.

Benzer şekilde, $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ olduğunda $|f(x) - L| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ bulunabiliyorsa x x_0 a sağdan yaklaşırken f in limiti L dir denir ve $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$ yazılır.

Teorem: $f: A \to \mathbb{R}$ fonksiyon olsun. $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ ise $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$ ve $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$ dir.

Uyarı: Fonksiyonun x_0 da sağ veya sol limitlerinden birisi yoksa veya sağ ve sol limitleri farklı ise fonksiyonun x_0 da limiti yoktur.

Örnek: $\lim_{x \to 3} |x-3| = ?$

$$\lim_{x \to 3^-} |x-3| = \lim_{x \to 3^-} (3-x) = 0, \quad \lim_{x \to 3^+} |x-3| = \lim_{x \to 3^+} (x-3) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 3^-} |x-3| = \lim_{x \to 3^+} |x-3| = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 3} |x-3| = 0$$

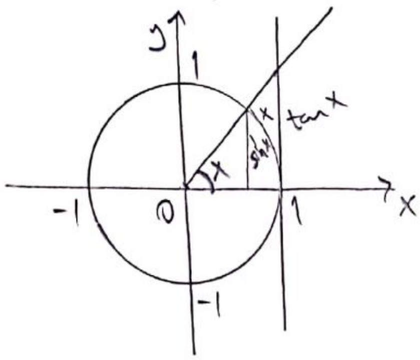
Örnek: $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 1 \\ \frac{x}{2}, & x < 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = ?$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 2x = 2, \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$$

Sağ ve sol limitler farklı olduğundan $\lim_{x \to 1} f(x)$ limiti yoktur.

Örnek: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ olduğunu gösterelim:

$x \in (0, \frac{\pi}{2})$ için birim çemberi göz önüne alalım.



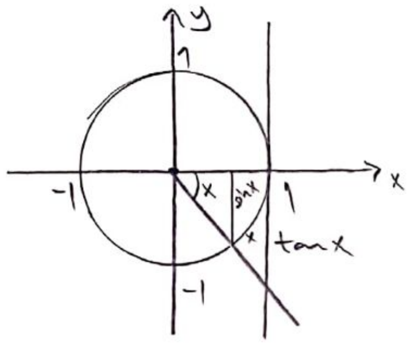
$$\sin x \leq x \leq \tan x \Rightarrow \frac{\sin x}{\sin x} \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{\tan x}{\sin x}$$

$$\Rightarrow 1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} \cos x = \cos 0 = 1 \ , \ \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

$\Rightarrow$ Sıkıştırma teoremine göre $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ dir.

$x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ için birim çemberi ele alalım.



$$\tan x \leq x \leq \sin x \qquad (\sin x < 0)$$

$$\Rightarrow \frac{\tan x}{\sin x} \geq \frac{x}{\sin x} \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{\cos x} \geq \frac{x}{\sin x} \geq 1$$

$$\Rightarrow \cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

$\lim_{x \to 0^-} \cos x = \cos 0 = 1$, $\lim_{x \to 0^-} 1 = 1$ $\Rightarrow$ Sıkıştırma teoremine göre

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Örnek: $\lim_{x \to 2} \frac{|x-2|}{x-2} = ?$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{2-x}{x-2} = \lim_{x \to 2^-} (-1) = -1$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{x-2}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} 1 = 1$$

Sağ ve sol limitler farklı $\Rightarrow \lim_{x \to 2} \frac{|x-2|}{x-2}$ yoktur.

Tanım: $f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

Her $\varepsilon > 0$ için $x > M$ olduğunda $|f(x) - L| < \varepsilon$ olacak şekilde $M > 0$ varsa x sonsuza giderken $f(x)$ L ye gider denir ve $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ yazılır.

Benzer şekilde her $\varepsilon > 0$ için $x < M$ olduğunda $|f(x) - L| < \varepsilon$ olacak şekilde $M < 0$ sayısı varsa x eksi sonsuza giderken $f(x)$ L ye gider denir ve $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ yazılır.

Örnek: $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ olduğunu gösterelim.

$\varepsilon > 0$ verilsin. $x > M$ olduğunda $|f(x) - 0| < \varepsilon$ olacak şekilde $M > 0$ sayısı bulmalıyız.

$$|f(x) - 0| = \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x} < \frac{1}{M} \Rightarrow M = \frac{1}{\varepsilon} \text{ olarak seçersek}$$

$|f(x)| < \varepsilon$ elde edilir.

Tanım: $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

Her $\varepsilon > 0$ için $0 < |x - x_0| < \delta$ olduğunda $f(x) > \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa x x_0 a giderken f in limiti sonsuzdur denir ve $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ yazılır.

Benzer şekilde, her $\varepsilon < 0$ için $0 < |x - x_0| < \delta$ olduğunda $f(x) < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa x x_0 a giderken f in limiti eksi sonsuzdur denir ve $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ yazılır.

Örnek: $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ olduğunu gösterelim:

$\varepsilon > 0$ verilsin. $0 < |x| < \delta$ olduğunda $f(x) > \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı bulmalıyız.

$$f(x) = \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta^2}$$

$$\frac{1}{\delta^2} = \varepsilon \Leftrightarrow \delta = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \text{ O halde } \delta = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \text{ olarak seçersek}$$

$f(x) > \varepsilon$ elde edilir.

Tanım: $f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $x > \delta$ olduğunda $f(x) > \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa x sonsuza giderken f'in limiti sonsuzdur denir ve $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ yazılır.

Diğer tanımlar da benzer şekilde yapılabilir.

Uyarı:
$$\lim_{x \to \mp\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} \mp\infty, & n > m \\ \frac{a_n}{b_m}, & n = m \\ 0, & n < m \end{cases}$$

Örnek:
$$\lim_{x \to \infty} \frac{5x^2 - 1}{9x^2 + 2x - 5} = \frac{5}{9}, \quad \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + x - 1}{-2x + 5} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x + 1} = -\infty$$

Belirsizlikler

$x \to x_0$ veya $x \to \mp\infty$ iken $\lim f(x)$ ve $\lim g(x)$ var ve $\lim g(x) \neq 0$ ise $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$ olduğunu biliyoruz. Eğer $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$ ise bu kuralı uygulayamayız. Bu durumda belirsizlik adı verilen biçim ile karşılaşırız. Bu belirsizlik $\left(\frac{0}{0}\right)$ ile gösterilir. Bunun dışında $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$, $\infty - \infty$ durumları da $\frac{0}{0}$ biçimine getirilebileceği için belirsizlik adını alır.

Örnek: $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = ?$

$x \to 1$ iken $x^2 + 2x - 3 \to 0$, $x - 1 \to 0$ olduğundan $\left(\frac{0}{0}\right)$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+3)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = 4$$

Örnek: $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = ?$

$\left(\frac{0}{0}\right)$ belirsizliği: $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)$

$$= \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\right) = 1\cdot\frac{1}{\cos 0} = 1$$

Örnek: $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos 2x} = ?$

$\left(\frac{0}{0}\right)$ belirsizliği: $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos 2x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\overset{-1}{\cancel{\sin x - \cos x}}}{(\cancel{\cos x - \sin x})(\cos x + \sin x)}$$

$$= -\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Örnek: $\lim_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-4}\right) = ?$

$x\to\infty$ iken $\sqrt{x^2+x}$ ve $\sqrt{x^2-4}$ sonsuza gider ve $\infty-\infty$ belirsizliği ortaya çıkar. Bu belirsizlikten kurtulmak için fonksiyonu eşleniği ile çarpıp böleriz.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-4}\right) = \lim_{x\to\infty}\left[\left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-4}\right)\frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-4}}\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}+x-\cancel{x^2}+4}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}\left(1+\overbrace{\frac{4}{x}}^{\to 0}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}}+\sqrt{1-\underbrace{\frac{4}{x}}_{\to 0}}\right)} = \frac{1}{2}.$$

Örnek: $\lim_{x\to\infty}\left(x\sin\frac{1}{x}\right) = ?$

$(\infty\cdot 0)$ belirsizliği: $\lim_{x\to\infty}\left(x\sin\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t} = 1$

$\frac{1}{x} = t$ dersek

$x\to\infty$ iken $t\to 0^+$

Asimptotlar

Tanım: $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ veya $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$ oluyorsa $y=b$ doğrusuna $y=f(x)$ fonksiyonunun yatay asimptotudur denir.

Örnek: $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+1}{x^2+2} = 3$ ve $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2+1}{x^2+2} = 3$ olduğundan

$y=3$ doğrusu $y=\frac{3x^2+1}{x^2+2}$ fonksiyonunun yatay asimptotudur.

Uyarı: Eğri; yatay asimptotunu kesebilir.

Örnek: $y = 2 + \frac{\sin x}{x}$ eğrisinin yatay asimptotunu bulalım:

Her $x \in \mathbb{R}$ için $-1 \leq \sin x \leq 1$ dir.

$x \to \infty$ iken $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$ olur.

$\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = 0$ ve $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ olduğundan sandviç teoremine göre $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ olur.

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(2 + \frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} 2 + \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 2$$

$\Rightarrow$ $x \to \infty$ iken $y=2$ yatay asimptottur.

Benzer şekilde $x \to -\infty$ iken de $y=2$ nin yatay asimptot olduğu gösterilebilir.

Eğik asimptot

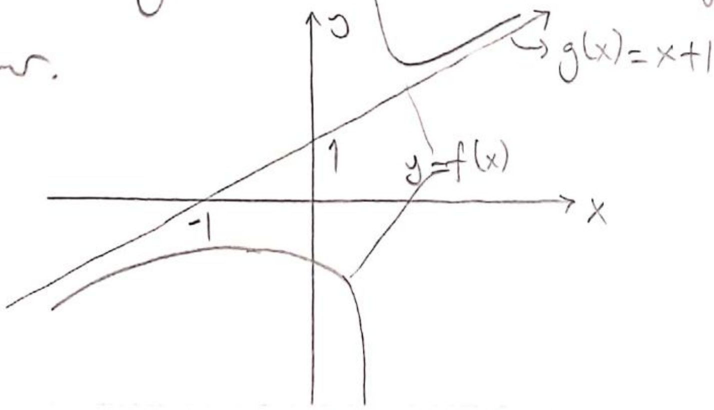
Rasyonel bir fonksiyonun payının derecesi paydasının derecesinden bir fazla ise fonksiyonun bir eğik asimptotu vardır. Fonksiyonu bir lineer fonksiyon ile $x \to \mp\infty$ iken limiti sıfıra giden bir kalanın toplamı olarak yazmak için pay paydaya bölünür.

Örnek: $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$ fonksiyonunun eğik asimptotunu bulalım:

$$\begin{array}{r|l} x^2+1 & x-1 \\ \cline{2-2} -x^2-x & x+1 \\ \cline{1-1} x+1 & \\ -x-1 & \\ \cline{1-1} 2 & \end{array} \Rightarrow f(x)=x+1+\frac{2}{x-1}$$

$x \to \mp\infty$ iken $\dfrac{2}{x-1} \to 0$ olacağı için $f(x)$ fonksiyonu $g(x)=x+1$ doğrusuna yaklaşır.

$\Rightarrow$ $g(x)=x+1$ doğrusu $x\to\mp\infty$ iken $f(x)$ in eğik asimptotudur.



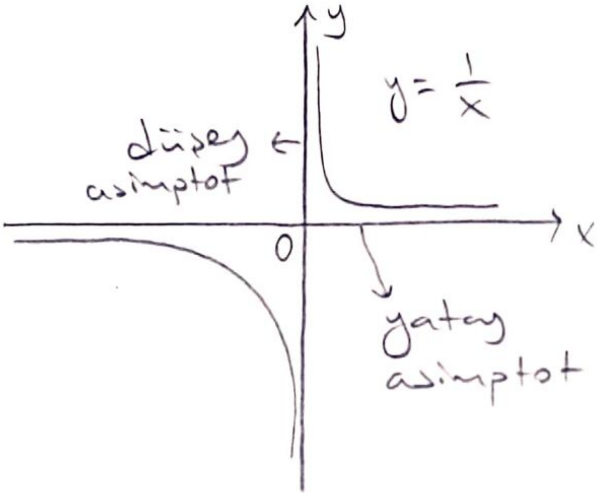
Tanım: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\mp\infty$ veya $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\mp\infty$ oluyorsa $x=x_0$ doğrusuna $y=f(x)$ fonksiyonunun bir dikey (düşey) asimptotu denir.

Örnek: $f(x)=\dfrac{1}{x}$ fonksiyonunun düşey asimptotlarını bulalım.

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x}=\infty \Rightarrow x=0$ sağdan düşey asimptot

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x}=-\infty \Rightarrow$ " soldan " "

Örnek



Ayrıca $\lim\limits_{x\to\mp\infty} \dfrac{1}{x}=0$ olduğu için $y=0$ $x\to\mp\infty$ iken yatay asimptot

Scanned by CamScanner